Interpretación del multiplicador y Teorema de la Envolvente

Aplicaciones matemáticas para economía y negocios (EAF2010)

Felipe Del Canto

Pontificia Universidad Católica de Chile

Primer semestre de 2021

Interpretación del multiplicador

- En el problema del consumidor, resolvíamos

$$\begin{aligned} \max_{v,s\in\mathbb{R}_+} \quad & \ln(v)+\ln(s) \\ \text{s.a.} \quad & v+s=8 \end{aligned}$$

  y el único candidato a óptimo era $v=s=4$, con utilidad $2\ln(4)$ y $\lambda_1=\frac{1}{4}$.

- ¿Qué pasa con la solución óptima si mi tiempo libre crece en 1 hora?
  - Porque terminé antes de trabajar.

Motivación: El problema del consumidor

- Ahora hay que resolver

$$\begin{aligned} \max_{v,s\in\mathbb{R}_+} \quad & \ln(v)+\ln(s) \\ \text{s.a.} \quad & v+s=9 \end{aligned}$$

- Si usamos el método de Lagrange, obtenemos $v=s=4{,}5$.
  - Aquí la utilidad es $2\ln(4{,}5)$ y $\lambda_2=\frac{1}{4{,}5}$.

- ¿Cuál fue el cambio en la utilidad?

- Notar que

$$2\ln(4{,}5) - 2\ln(4) = 2\ln\left(\frac{4{,}5}{4}\right)$$

- Luego, el cambio en la utilidad fue de

$$2\ln\left(\frac{4{,}5}{4}\right) \approx 0{,}2356 \approx 0{,}25 = \lambda_1$$

- ¡El multiplicador fue similar al cambio del valor de la función!
  - Esto no es casualidad y lo formalizaremos a continuación.

Interpretación económica del multiplicador

- Observar que al resolver el problema

$$\begin{aligned} \max_{x,y\in\mathbb{R}} \quad & f(x,y) \\ \text{s.a.} \quad & g(x,y) = c \end{aligned}$$

  la solución óptima (x^*,y^*,λ^*) depende del valor de c.

- Es decir, podemos escribir $(x^*(c),y^*(c),\lambda^*(c))$.
  - Luego, el valor óptimo de f (f^*) es una función de c.

- En algunos casos, $f^*(c)$ se puede derivar.
  - Y resultará que esa derivada es igual al multiplicador evaluado en el punto.

Proposición (Interpretación del multiplicador de Lagrange)

Sean f y g funciones bivariadas y supongamos que el problema de optimización

$$\begin{aligned} \max_{x,y\in\mathbb{R}} \quad & f(x,y) \\ \text{s.a.} \quad & g(x,y)=c \end{aligned}$$

tiene solución $(x^*(c),y^*(c),\lambda^*(c))$. Si x^*, y^* y λ^* son funciones con derivada continua y además se cumple la condición de calificación de restricción (es decir, $\nabla g(x^*(c),y^*(c))\neq 0$), entonces

$$\lambda^*(c)=\frac{d}{dc}f(x^*(c),y^*(c))$$

- **¡IMPORTANTE!** Es necesario que x^*, y^* y λ^* tengan derivada continua.

Interpretación económica del multiplicador

- El teorema dice que λ^* es lo que cambiaría f si dejamos que c crezca.
- Por eso, decimos que λ^* representa un **precio sombra**.
  - Porque representa cuánto dejamos de ganar por tener c en ese valor.
  - Si $\lambda > 0$, entonces cuando sube c, sube el valor óptimo.
  - Si $\lambda < 0$, entonces cuando sube c, cae el valor óptimo.
- De alguna forma el multiplicador responde a la pregunta:

"¿Cuánto estoy dispuesto a pagar como máximo
para aumentar la restricción en 1 unidad?"

Ejemplo (Interpretación del multiplicador de Lagrange)

Para el problema del consumidor, si la cantidad total de horas es T

$$\begin{aligned} \max_{v,s\in\mathbb{R}_+} \quad & \ln(v)+\ln(s) \\ \text{s.a.} \quad & v+s=T \end{aligned}$$

Entonces la solución es $v^*(T)=s^*(T)=\frac{T}{2}$ y $\lambda^*(T)=\frac{1}{\frac{T}{2}}$.Las funciones tienen derivadas continuas y en este caso $\nabla g=(1,1)$, que nunca se hace 0. Luego

$$\frac{d}{dT}(\ln v^*(T)+\ln(s^*(T)))=\lambda^*(T)=\frac{1}{\frac{T}{2}}$$

Ejemplo (Interpretación del multiplicador de Lagrange)

Es decir, la utilidad extra que se gana por una hora de ocio adicional es $\frac{1}{\frac{T}{2}}$, donde T es el número de horas libres en ese momento.

Por ejemplo, cuando teníamos 8 horas libres, la utilidad extra de ganar una hora adicional era $0{,}25$. Eso significa que el consumidor estaría dispuesto a lo más a "pagar" $0{,}25$ unidades de utilidad para que le aumenten sus horas libres en 1.

Observen además que la utilidad extra que se gana por hora adicional va decreciendo a medida que tenemos más horas libres. Eso hace sentido, entre más horas libres tengo, menos me beneficia una adicional.

Ejemplo (Interpretación del multiplicador de Lagrange)

Para el problema de la firma que maximiza sus ingresos, si el presupuesto disponible es $B \geq 100$

$$\begin{aligned} \max_{K,L \in \mathbb{R}_+} \quad & p(\sqrt{K} + L) \\ \text{s.a.} \quad & K + 20L = B \end{aligned}$$

Entonces la solución es $K^*(B) = 100$, $L^*(B) = \frac{B-100}{20}$ y $\lambda^*(B) = \frac{p}{20}$. Las funciones tienen derivadas continuas y en este caso $\nabla g = (1,20)$, que nunca se hace 0. Luego

$$\frac{d}{dB}(p(\sqrt{K} + L)) = \lambda^*(B) = \frac{p}{20}$$

Esto dice que la empresa está dispuesta a pagar a lo más $\frac{p}{20}$ para que le aumenten el presupuesto en $1.

Ejemplo (Interpretación del multiplicador de Lagrange)

Este ejemplo es curioso porque el crecimiento en las utilidades es constante. ¿Cuál es la razón?

Lo que sucede es que una vez que se escogió la cantidad deseada de capital, todo aumento en el presupuesto va a trabajo.

Lugo, las ganancias de la empresa son entonces $\frac{p}{20}$ porque cada trabajador adicional produce una unidad, que se vende a p y se divide por 20 que es el costo de ese trabajador ($1 adicional de presupuesto permite comprar $\frac{1}{20}$ de trabajador).

Ejercicio (Interpretación del multiplicador de Lagrange)

Haga el mismo análisis para el problema inverso de la empresa (minimizar costos para alcanzar un cierto nivel de producción). Interprete (*Ayuda: Cuidado con el cambio de signo producto del teorema.*)

Ejercicio (Interpretación del multiplicador de Lagrange)

Intente resolver el problema de la firma de maximización de utilidades cuando $0 < B < 100$.

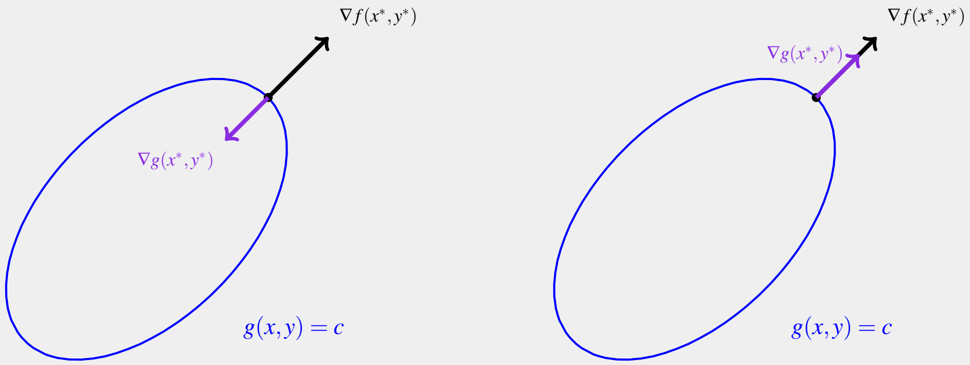
Interpretación geométrica del multiplicador

- Recordemos que el multiplicador de Lagrange cumple $\nabla f = \lambda \nabla g$.

- Geométricamente, λ dice cómo se comparan ambos gradientes.
  - Si $\lambda > 0$, entonces f y g van en el mismo sentido.
  - Si $\lambda < 0$, entonces f y g van en sentidos opuestos.

- Gráficamente, veremos si los gradientes apuntan al mismo lado o no.

Interpretación geométrica del multiplicador



(a) $\lambda < 0$ **(b)** $\lambda > 0$

Interpretación del multiplicador

- Ambas interpretaciones son interesantes.
  - Para nosotros, la económica es la más importante.
  - Porque nos permite interpretar la solución del problema.

- Este resultado es un caso particular de un teorema más general.

- En economía lo conocemos como **teorema de la envolvente**.

Teorema de la envolvente

Motivación: La empresa innovadora

- Supongamos que una empresa tiene función de producción

$$Y(K,L) = K^{0,3}L^{0,7}$$

- Para 1 por cada unidad de K y 20 por cada unidad de L.
  - Y tiene un presupuesto de 500 para adquirir K y L.

- Si la empresa quiere maximizar sus ganancias ¿cuánto K y L adquiere?
  - La respuesta: $K = 150$ y $L = 17{,}5$ ($\lambda^* \approx 0{,}07$).
  - En ese punto, $Y(K,L) \approx 33{,}34$.

Motivación: La empresa innovadora

- Ya sabemos que λ^* es el cambio de $Y(K^*, L^*)$ cuando cambia el presupuesto.

- Pero, ¿y si la empresa cambia su tecnología?
  - Por ejemplo, se vuelve más intensiva en capital ($Y(K,L) = K^{0,5}L^{0,5}$).

- ¿Y si los precios de los insumos cambian?

Motivación: La empresa innovadora

- Una opción es resolver todo el problema de nuevo.
  - Pero eso puede ser demasiado engorroso.

- Notar que cambiar, por ejemplo, la función Y tiene dos efectos:
  1. Cambia la solución óptima (K^*, L^*).
  2. Cambia la forma de calcular el valor óptimo de Y.

- Nos gustaría tener una forma de aproximar esos cambios.
  - Para eso usaremos lo que se conoce como **teorema de la envolvente**.

Función de valor

- Antes de comenzar, notar lo siguiente.

- Si la función objetivo y/o la restricción dependen de un valor a.
  - Un precio.
  - Lo importante es que a no forma parte del proceso de optimización.

- Entonces las soluciones x^* e y^* dependen de a.
  - Porque cambiar a podría cambiar esas soluciones óptimas.
  - Luego podemos escribir $x^*(a)$ e $y^*(a)$: son funciones de a.

Definición (Función de valor)

Sean $f(x,y;a)$ y $h(x,y;a)$ dos funciones que dependen de un parámetro a. Supongamos que el problema

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & f(x,y;a) \\ \text{s.a} \quad & h(x,y;a) = 0 \end{aligned}$$

está bien definido y tiene solución óptima $x^*(a)$ e $y^*(a)$. Llamamos **función de valor** del problema asociado a la función

$$f^*(a) = f(x^*(a), y^*(a); a)$$

¡Notar que la función de valor no es más que el valor de f en el punto óptimo!

Función de valor

- Por ejemplo, en la motivación, son parámetros:
  - Los exponentes de K y L en $Y(K, L)$.
  - Los precios de K y L.
  - El presupuesto.
- En la definición anterior "abusamos" de la notación.
  - En el sentido que a podría afectar solo a una de las funciones.
  - Los precios de K y L no afectan $Y(K, L)$.
- En los problemas anteriores, si la restricción era $g(x, y) = a$, entonces

$$h(x, y; a) = g(x, y) - a$$

Teorema (Teorema de la envolvente)

Sean $f(x,y;a), h(x,y;a)$ funciones con derivadas parciales continuas definidas en un dominio abierto. Sea $x^*(a)$, $y^*(a)$, $\lambda^*(a)$ la solución del problema

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & f(x,y;a) \\ \text{s.a} \quad & h(x,y;a) = 0 \end{aligned}$$

que tiene lagrangiano $\mathcal{L}(x,y,\lambda;a)$ y función de valor $f^*(a)$. Supongamos que x^*, y^* y λ^* son funciones con derivada continua (con respecto a a) y que $\nabla h(x^*(a), y^*(a); a) \neq 0$. Entonces

$$\frac{d}{da} f^*(a) = \frac{\partial}{\partial a} \mathcal{L}(x^*(a), y^*(a), \lambda^*(a); a)$$

- Notar lo poderoso del teorema:

  Para determinar cuánto cambia f^* cuando cambia a basta con derivar el lagrangiano $\mathcal{L}$ con respecto a a **ignorando el efecto del parámetro sobre la solución óptima.**

- Es por eso que al lado derecho tenemos $\frac{\partial}{\partial a}$ y no $\frac{d}{da}$.

Teorema de la envolvente

- Entonces, para usar el teorema:
  1. Resolvemos el problema, con parámetro arbitrario (sin darle un valor).
  2. Verificamos que las funciones x^*, y^* y λ^* tienen derivada continua.
  3. Verificamos que $\nabla h \neq 0$ en el punto que queremos calcular la derivada.
  4. Derivamos $\mathcal{L}$ con respecto a a pensando x, y y λ como constantes.
  5. Evaluamos la derivada en el punto deseado.

- **¡IMPORTANTE!** No revisar que el teorema se puede usar puede llevar a errores.

Ejemplo (Teorema de la envolvente)

Pensemos en un ejemplo anterior donde una empresa maximiza sus ganancias sujeto a un presupuesto:

$$\begin{aligned} \max_{K,L\in\mathbb{R}_+} \quad & \sqrt{K}+L \\ \text{s.a.} \quad & rK+20L=500 \end{aligned}$$

En este caso el precio de K es un parámetro $r\geq 1$ que solo afecta a la restricción pero no a la función objetivo. El lagrangiano para este problema es

$$\mathcal{L}(K,L,\lambda;r)=\sqrt{K}+L-\lambda\left[rK+20L-500\right]$$

Ahora resolvemos.

Ejemplo (Teorema de la envolvente)

Las CPO para el problema usando el lagrangiano son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = \frac{1}{2\sqrt{K}} - r\lambda = 0 \tag{CPO-K}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = 1 - 20\lambda = 0 \tag{CPO-L}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = rK + 20L - 500 = 0 \tag{CPO-λ}$$

De (CPO-L), $\lambda^*(r) = \frac{1}{20}$ (λ no depende de r). Luego, de (CPO-K) $K^*(r) = \frac{100}{r^2}$. Y, finalmente, de (CPO-λ) obtenemos $L^*(r) = 25 - \frac{5}{r}$. Notar que K^*, L^* y λ^* son funciones con derivada continua y el gradiente de la restricción es $(r, 20)$ que no se anula. ¡Podemos usar el teorema!.

Ejemplo (Teorema de la envolvente)

Tenemos que el cambio en la función de valor cuando cambia r es

$$\frac{\partial}{\partial r}\mathcal{L}(K^*,L^*,\lambda^*;r) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{K^*} + L^* - \lambda^*\left[rK^* + 20L^* - 500\right]\right) = -\lambda^* K^* = -\frac{5}{r^2}$$

Que la derivada sea negativa tiene sentido: si K es más caro, puedo comprar menos y por lo tanto produzco menos (o produzco menos eficiente que antes, si reemplazo por L).

Cuando $r = 1$, el cambio en la función de valor es -5. Esto se puede interpretar como que cuando el capital aumenta de precio de 1 a $1{,}01$, se pierden $5 \cdot 0{,}01 = 0{,}05$ en ganancias.

Si hiciéramos el cálculo, tenemos que $f^*(1) = 30$ y $f^*(1{,}01) \approx 29{,}95$, lo que muestra una aproximación muy precisa.

Ejercicio (Teorema de la envolvente)

Repita el ejemplo anterior, pero usando el precio del trabajo como parámetro.

Ejercicio (Teorema de la envolvente)

Analice el caso del problema del guardaparques cuando cambia el parámetro m que determina el camino, ¿qué es lo que encuentra? ¿puede encontrar para qué valor de m el guardaparques llega a la cima de la montaña?

Ejercicio (Teorema de la envolvente)

Resuelva el problema de optimización de la motivación para la función de producción

$$Y(K,L;\alpha) = K^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

Estime el cambio en las ganancias cuando α crece en el punto $\alpha = 0{,}3$ (el valor de α en la motivación) e interprete. Compare ese valor con el cambio en las ganancias cuando $\alpha = 0{,}5$ e interprete.